


ARKUSZ OBLICZENIOWY 	Dokument Ref:	<i>SX011a-EN-EU</i>	Str.	<i>1 z 7</i>
	Tytuł	<i>Przykład: Belka swobodnie podparta obciążona na końcach momentami zginającymi.</i>		
	Dot. Eurocodu	<i>EN 1993-1-1</i>		
	Wykonał	<i>Arnaud Lemaire</i>	Data	<i>Marzec 2005</i>
	Sprawdził	<i>Alain Bureau</i>	Data	<i>Marzec 2005</i>

Przykład: Belka swobodnie podparta, obciążona na końcach momentami zginającymi.

W poniższym przykładzie przedstawiono sprawdzenie nośności belki swobodnie podpartej w sposób widelkowy, obciążonej na końcach momentami zginającymi.



1: Podparcie widelkowe, zabezpieczające przekroje na końcach belki przed obrotem względem osi belki.

$$0 \leq \psi \leq 1$$

Przyjęto następującą konwencję znakowania: dodatnia wartość momentu zginającego oznacza, że działa on przeciwnie do ruchu wskazówek zegara, ujemna wartość momentu zginającego oznacza, że działa on zgodnie z ruchem wskazówek zegara.


W przedstawionym przykładzie moment zginający o dodatniej wartości działa w punkcie B, a moment zginający o ujemnej wartości w punkcie A.

Przyjęta konwencja znakowania powoduje, że moment zginający o dodatniej wartości powoduje ściskanie górnego pasa kształtownika. Współczynnik ψ określa stosunek wartości momentów zginających na końcach belki. W przedstawionym przykładzie jego wartość jest dodatnia.

Belka wykonana jest z dwuteownika walcowanego, jednokierunkowo zginana względem osi większej bezwładności i podparta na końcach w sposób widelkowy, uniemożliwiający obrót względem osi belki. Przedstawiony przykład zawiera:

- określenie klasy przekroju poprzecznego belki,
- wyznaczenie nośności belki na zginanie, z uwzględnieniem zwichrzenia (metoda uproszczona),
- wyznaczenie nośności belki na ścinanie,
- wyznaczenie ugięcia belki.

Nie brano pod uwagę przekrojów należących do klasy 4.

ARKUSZ OBLICZENIOWY 	Dokument Ref:	<i>SX011a-EN-EU</i>	Str.	2 z 7
	Tytuł	<i>Przykład: Belka swobodnie podparta obciążona na końcach momentami zginającymi.</i>		
	Dot. Eurocodu	<i>EN 1993-1-1</i>		
	Wykonał	<i>Arnaud Lemaire</i>	Data	<i>Marzec 2005</i>
	Sprawdził	<i>Alain Bureau</i>	Data	<i>Marzec 2005</i>

Częściowe współczynniki bezpieczeństwa

- $\gamma_G = 1,35$ (obciążenie stałe)
- $\gamma_Q = 1,50$ (obciążenie zmienne)
- $\gamma_{M0} = 1,0$
- $\gamma_{M1} = 1,0$

PN-EN 1990

PN-EN
1993-1-1 §
[6.1](#) (1)

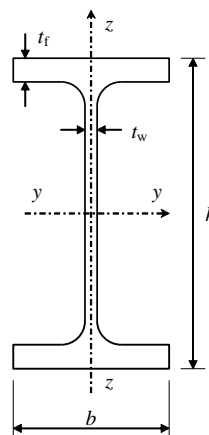
Dane

Zaprojektować belkę stropową w budynku wielopiętrowym, według poniższych danych. Należy przyjąć, że belka jest jednoprzęsłowa, swobodnie podparta w sposób widełkowy na końcach.


- Rozpiętość przęsła : $L = 9,80$ m
- Moment zginający w punkcie A, od obciążenia stałego :
 $M_{G,A} = -5$ kNm
- Moment zginający w punkcie B, od obciążenia stałego :
 $M_{G,B} = 5$ kNm
- Moment zginający w punkcie A, od obciążenia zmiennego :
 $M_{Q,A} = -55$ kNm
- Moment zginający w punkcie B, od obciążenia zmiennego:
 $M_{Q,B} = 35,2$ kNm
- Stal klasy : S355

Kształtownik IPE 500 – Stal klasy S355

Wysokość	$h = 500$ mm
Szerokość	$b = 200$ mm
Grubość środnika	$t_w = 10,2$ mm
Grubość pasa	$t_f = 16$ mm
Promień zaokrąglenia	$r = 21$ mm



Euronorma
19-57

ARKUSZ OBLICZENIOWY 	Dokument Ref:	<i>SX011a-EN-EU</i>	Str.	3 z 7
	Tytuł	<i>Przykład: Belka swobodnie podparta obciążona na końcach momentami zginającymi.</i>		
	Dot. Eurocodu	<i>EN 1993-1-1</i>		
	Wykonał	<i>Arnaud Lemaire</i>	Data	<i>Marzec 2005</i>
	Sprawdził	<i>Alain Bureau</i>	Data	<i>Marzec 2005</i>

Pole powierzchni przekroju poprzecznego	$A = 115,5 \text{ cm}^2$
Moment bezwładności względem osi y-y	$I_y = 48200 \text{ cm}^4$
Moment bezwładności względem osi z-z	$I_z = 2142 \text{ cm}^4$
Moment bezwładności przy skręcaniu	$I_t = 89,29 \text{ cm}^4$
Wycinkowy moment bezwładności	$I_w = 1249000 \text{ cm}^6$
Sprężysty wskaźnik wytrzymałości	$W_{el,y} = 1928 \text{ cm}^3$
Plastyczny wskaźnik wytrzymałości	$W_{pl,y} = 2194 \text{ cm}^3$
Promień bezwładności	$i_z = 4,31 \text{ cm}$

Pominięto ciężar własny belki.

Kombinacja obciążeń w SGN :

Moment zginający - podpora (A) :

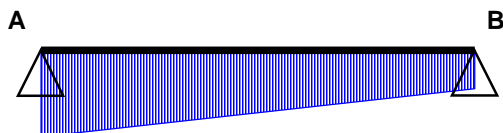
$$-(\gamma_G M_{G,A} + \gamma_Q M_{Q,A}) = -[1,35 \times (-5) + 1,50 \times (-55)] = 89,3 \text{ kNm}$$

Moment zginający - podpora (B) :

$$\gamma_G M_{G,B} + \gamma_Q M_{Q,B} = 1,35 \times 5 + 1,50 \times 35,2 = 59,5 \text{ kNm}$$

Stosunek momentów zginających : $\psi = 59,5 / 89,3 = 0,666$

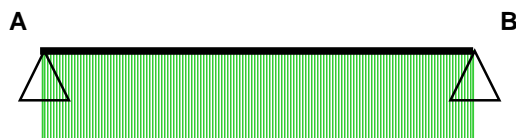
Wykres momentów zginających



Maksymalna wartość momentu zginającego przy podporze A :

$$M_{y,Ed} = +89,3 \text{ kNm}$$


Wykres sił poprzecznych



Siła poprzeczna ma stałą wartość na długości belki :

$$V_{z,Ed} = (89,3 - 59,5) / 9,80 = 3,04 \text{ kN}$$

PN-EN 1990
§ 6.4.3.2
wzór 6.10

	Dokument Ref:	SX011a-EN-EU	Str.	4 z 7
	Tytuł	Przykład: Belka swobodnie podparta obciążona na końcach momentami zginającymi.		
	Dot. Eurocodu	EN 1993-1-1		
	Wykonał	Arnaud Lemaire	Data	Marzec 2005
	Sprawdził	Alain Bureau	Data	Marzec 2005

Granica plastyczności

Stal klasy S355

Maksymalna grubość ścianki 16 mm < 40 mm : $f_y = 355 \text{ N/mm}^2$

Uwaga :Załącznik krajowy może zalecać inną wartość f_y niż w tablicy 3.1. Wartość f_y może być także przyjęta według certyfikatu producenta stali.

Klasyfikacja przekroju poprzecznego :

Parametr ε wyznaczono w zależności od granicy plastyczności :

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{235}{f_y [\text{N/mm}^2]}} = 0,81$$

Pas osiowo ściskany:

$$c = (b - t_w - 2 r) / 2 = (200 - 10,2 - 2 \times 21) / 2 = 73,9 \text{ mm}$$

$$c/t_f = 73,9 / 16 = 4,62 \leq 9 \varepsilon = 7,29 \quad \text{Klasa 1}$$

Środek zginany:

$$c = h - 2 t_f - 2 r = 500 - 2 \times 16 - 2 \times 21 = 426 \text{ mm}$$

$$c / t_w = 426 / 10,2 = 41,76 < 72 \varepsilon = 58,32 \text{ Klasa 1}$$

Jako klasę przekroju należy przyjąć wartość wyższą z klas pasa i środka. W rozpatrywanym przykładzie przyjęto: Klasę 1.

Ponieważ przekrój należy do klasy 1, sprawdzenie SGN należy przeprowadzić przyjmując nośność plastyczną przekroju poprzecznego belki.

Nośność na zginanie

Nośność obliczeniową przekroju na zginanie wyznaczono według wzorów:

$$M_{c,Rd} = M_{pl,Rd} = W_{pl,y} f_y / \gamma_{M0} = (2194 \times 355 / 1,0) / 1000$$

$$M_{c,Rd} = 778,87 \text{ kNm}$$


$$M_{y,Ed} / M_{c,Rd} = 89,3 / 778,87 = 0,115 < 1 \quad \text{OK}$$

PN-EN
1993-1-1
[Tab. 3.1](#)

PN-EN
1993-1-1
[Tab. 5.2](#)
(ark. 2 of 3)

PN-EN
1993-1-1
[Tab. 5.2](#)
(ark. 1 of 3)

PN-EN
1993-1-1 §
[6.2.5](#)

ARKUSZ OBLICZENIOWY 	Dokument Ref:	<i>SX011a-EN-EU</i>	Str.	5 z 7
	Tytuł	<i>Przykład: Belka swobodnie podparta obciążona na końcach momentami zginającymi.</i>		
	Dot. Eurocodu	<i>EN 1993-1-1</i>		
	Wykonał	<i>Arnaud Lemaire</i>	Data	<i>Marzec 2005</i>
	Sprawdził	<i>Alain Bureau</i>	Data	<i>Marzec 2005</i>

Współczynnik redukcyjny przy zwichrzeniu – współczynnik zwichrzenia

W celu wyznaczenia nośności belki z uwzględnieniem zwichrzenia, należy wyznaczyć współczynnik redukcyjny uwzględniający wyoboczenie skrętne - współczynnik zwichrzenia. Poniżej przedstawiono uproszczoną metodę pozwalającą na wyznaczenie tego współczynnika. W metodzie tej nie ma konieczności wyznaczania wartości sprężystego momentu krytycznego przy wyoboczeniu skrętnym.

Smukłość elementu

Smukłość elementu wykonanego ze stali klasy S355 wyznaczono według wzoru:

$$\bar{\lambda}_{LT} = \frac{L/i_z}{85} = \frac{980/4,31}{85} = 2,675$$

patrz [SN002](#)

W przypadku kształtowników walcowanych, $\bar{\lambda}_{LT,0} = 0,4$

Uwaga: Wartość współczynnika $\bar{\lambda}_{LT,0}$ może być przyjęta zgodnie z Załącznikiem Krajowym, wartością zalecaną jest 0,4.

Więc $\bar{\lambda}_{LT} = 2,675 > \bar{\lambda}_{LT,0} = 0,4$

PN-EN
1993-1-1 §
[6.3.2.3\(1\)](#)
i NA.17

Współczynnik redukcyjny – współczynnik zwichrzenia

W przypadku profili walcowanych współczynnik zwichrzenia wyznacza się według wzoru :

$$\chi_{LT} = \frac{1}{\phi_{LT} + \sqrt{\phi_{LT}^2 - \beta \bar{\lambda}_{LT}^2}} \quad \text{but} \quad \begin{cases} \chi_{LT} \leq 1,0 \\ \chi_{LT} \leq \frac{1}{\bar{\lambda}_{LT}^2} \end{cases}$$

gdzie : $\phi_{LT} = 0,5 \left[1 + \alpha_{LT} (\bar{\lambda}_{LT} - \bar{\lambda}_{LT,0}) + \beta \bar{\lambda}_{LT}^2 \right]$

α_{LT} jest współczynnikiem imperfekcji. W przypadku zastosowania tej metody dla profili walcowanych, krzywa wyoboczenia powinna być określona na podstawie tablicy 6.5 :


Dla $h/b = 500 / 200 = 2,5 > 2$ przyjęto krzywą c ($\alpha_{LT} = 0,49$)

$\bar{\lambda}_{LT,0} = 0,4$ i $\beta = 0,75$

Uwaga: Wartość $\bar{\lambda}_{LT,0}$ i β może być podana w Załączniku Krajowym. Wartościami zalecanymi są odpowiednio 0,4 i 0,75.

PN-EN
1993-1-1 §
[6.3.2.3\(1\)](#)

PN-EN
1993-1-1
[Tab. 6.5](#)
[Tab. 6.3](#)

	Dokument Ref:	SX011a-EN-EU	Str.	6 z 7
	Tytuł	Przykład: Belka swobodnie podparta obciążona na końcach momentami zginającymi.		
	Dot. Eurocodu	EN 1993-1-1		
	Wykonał	Arnaud Lemaire	Data	Marzec 2005
	Sprawdził	Alain Bureau	Data	Marzec 2005

Wyznaczono : $\phi_{LT} = 0,5 \left[1 + 0,49 (2,675 - 0,4) + 0,75 \times (2,675)^2 \right] = 3,741$

i :

$$\chi_{LT} = \frac{1}{3,741 + \sqrt{(3,741)^2 - 0,75 \times (2,675)^2}} = 0,150$$

Sprawdzono : $\chi_{LT} = 0,150 < 1,0$

ale : $\chi_{LT} = 0,150 > 1 / \bar{\lambda}_{LT}^2 = 0,140$

więc : $\chi_{LT} = 0,140$

Wpływ rozkładu momentu zginającego na długości belki na nośność obliczeniową na zginanie uwzględniono poprzez zastosowanie współczynnika f:

$$f = 1 - 0,5 (1 - k_c) \left[1 - 2 (\bar{\lambda}_{LT} - 0,8)^2 \right] \quad \text{lecz } \leq 1$$

gdzie : $\psi = 59,5 / 89,3 = 0,666$

$$k_c = \frac{1}{1,33 - 0,33 \times \psi} = \frac{1}{1,33 - 0,33 \times 0,666} = 0,9$$

Więc : $f = 1 - 0,5 (1 - 0,90) [1 - 2 \times (2,675 - 0,8)^2] = 1,301 \geq 1$ so $f = 1,0$

Otrzymano : $\chi_{LT,mod} = \chi_{LT} / f = 0,140 / 1,0 = 0,140$

Nośność obliczeniowa na zwichrzenie

$$M_{b,Rd} = \chi_{LT,mod} W_{pl,y} f_y / \gamma_{M1}$$

$$M_{b,Rd} = (0,140 \times 2194000 \times 355 / 1,0) \times 10^{-6} = 109 \text{ kNm}$$

$$M_{y,Ed} / M_{b,Rd} = 89,3 / 109 = 0,819 < 1 \quad \mathbf{OK}$$

Nośność na ścinanie

Pomijając wpływ skręcania, nośność (plastyczna) na ścinanie zależy od pola powierzchni przekroju czynnego przy ścinaniu, wyznaczonego według wzoru:

$$A_{v,z} = A - 2 b t_f + (t_w + 2 r) t_f$$


$$A_{v,z} = 11550 - 2 \times 200 \times 16 + (10,2 + 2 \times 21) \times 16 = 5985 \text{ mm}^2$$

PN-EN
1993-1-1 §
[6.3.2.3 \(2\)](#)

PN-EN
1993-1-1
[Tab. 6.6](#)

PN-EN
1993-1-1 §
[6.3.2.1](#)

PN-EN
1993-1-1 §
[6.2.6 \(3\)](#)

ARKUSZ OBLICZENIOWY 	Dokument Ref:	<i>SX011a-EN-EU</i>	Str.	7 z 7
	Tytuł	<i>Przykład: Belka swobodnie podparta obciążona na końcach momentami zginającymi.</i>		
	Dot. Eurocodu	<i>EN 1993-1-1</i>		
	Wykonał	<i>Arnaud Lemaire</i>	Data	<i>Marzec 2005</i>
	Sprawdził	<i>Alain Bureau</i>	Data	<i>Marzec 2005</i>

Nośność (plastyczna) na ścinanie

$$V_{pl,z,Rd} = \frac{A_{v,z} (f_y / \sqrt{3})}{\gamma_{M0}} = \frac{5985 \times (355 / \sqrt{3}) \times 10^{-3}}{1,0} = 1226 \text{ kN}$$

$$V_{z,Ed} / V_{pl,z,Rd} = 3,04 / 1226 = 0,002 < 1 \quad \mathbf{OK}$$

Sprawdzenie na wyoboczenie przy ścinaniu nie jest wymagane gdy:

$$h_w / t_w \leq 72 \varepsilon / \eta$$

η przyjmuje się jako równy 1,0

$$h_w / t_w = (500 - 2 \times 16) / 10,2 = 45,9 < 72 \times 0,81 / 1,0 = 58,3$$

Sprawdzenie SGU

Kombinacja obciążeń w SGU

Moment zginający - podpora (A) :

$$-(M_{G,A} + M_{Q,A}) = -(-5 - 55) = 60 \text{ kNm}$$


Moment zginający - podpora (B) :

$$M_{G,B} + M_{Q,B} = 5 + 35,2 = 40,2 \text{ kNm}$$

PN-EN
1993-1-1 §
[6.2.6](#) (2)

PN-EN
1993-1-1 §
[6.2.6](#) (6)

PN-EN 1990
§ [6.5.3](#)

ARKUSZ OBLICZENIOWY 	Dokument Ref:	<i>SX011a-EN-EU</i>	Str.	8 z 7
	Tytuł	<i>Przykład: Belka swobodnie podparta obciążona na końcach momentami zginającymi.</i>		
	Dot. Eurocodu	<i>EN 1993-1-1</i>		
	Wykonał	<i>Arnaud Lemaire</i>	Data	<i>Marzec 2005</i>
	Sprawdził	<i>Alain Bureau</i>	Data	<i>Marzec 2005</i>

Ugięcie spowodowane momentami zginającymi :

Maksymalną wartość ugięcia wyznacza się na podstawie wartości momentów zginających i charakterystyk geometrycznych przekroju poprzecznego belki. Odległość od podpory do miejsca maksymalnego ugięcia belki wyznaczono według wzoru:

$$x_{\max} = \frac{\psi + 2}{3 + \sqrt{3(1 + \psi + \psi^2)}} L$$

$$x_{\max} = \frac{0,67 + 2}{3 + \sqrt{3(1 + 0,67 + 0,67^2)}} \times 9,8 = 4,739 \text{ m}$$

Wartość maksymalnego ugięcia wyznaczono według wzoru:

$$w = \frac{M_A}{EI} \left[\frac{\psi - 1}{6L} x_{\max}^3 + \frac{1}{2} x_{\max}^2 - \frac{2 + \psi}{6} L x_{\max} \right]$$

$$w = \frac{60 \times 10^6}{210000 \times 48200 \times 10^4} \left[\frac{0,67 - 1}{6 \times 9800} 4739^3 + \frac{1}{2} 4739^2 - \frac{2 + 0,67}{6} 9800 \times 4739 \right]$$

$$= 5,9 \text{ mm}$$

Wartość maksymalnego ugięcia może być wyrażona jako $L/1690$

Uwaga 1: Graniczna wartość ugięcia powinna być określona przez inwestora.

W Załączniku Krajowym mogą być podane wartości graniczne ugięć. W prezentowanym przykładzie wartość maksymalnego ugięcia belki może być uznana za dopuszczalną, gdyż Załącznik Krajowy NA.22 do PN-EN 1993-1-1 podaje następujące wartości graniczne:

belki główne	L/350
belki drugorzędne	L/250.

PN-EN
1993-1-1 §
[7.2.1](#)

Uwaga 2: Biorąc pod uwagę drgania, Załącznik Krajowy może podawać dopuszczalne częstotliwości drgań własnych elementów.

W rozpatrywanym przykładzie, wartość maksymalnego ugięcia belki jest na tyle mała, że nie rozpatrywano zagadnienia związanego z drganiami belki. Załącznik Krajowy NA.24 do PN-EN 1993-1-1 nie wymaga sprawdzania częstotliwości drgań własnych gdy ugięcie od kombinacji quasi-stałej nie przekracza 10mm.

PN-EN
1993-1-1 §
[7.2.3](#)

Protokół jakości

TYTUŁ ZASOBU		Przykład: Belka swobodnie podparta obciążona na końcach momentami zginającymi	
Odniesienie(a)			
ORYGINAŁ DOKUMENTU			
	Nazwisko	Instytucja	Data
Stworzony przez	Arnaud Lemaire	CTICM	13/04/05
Zawartość techniczna sprawdzona przez	Alain Bureau	CTICM	13/04/05
Zawartość redakcyjna sprawdzona przez	D C Iles	SCI	24/8/05
Techniczna zawartość zaaprobowana przez następujących partnerów STALE:			
1. UK	G W Owens	SCI	7/7/05
2. France	A Bureau	CTICM	17/8/05
3. Germany	A Olsson	SBI	8/8/05
4. Sweden	C Muller	RWTH	10/8/05
5. Spain	J Chica	Labein	12/8/05
Zasób zatwierdzony przez technicznego koordynatora	G W Owens	SCI	7/7/06
DOKUMENT TŁUMACZONY			
Tłumaczenie wykonane przez:		Andrzej Wojnar	
Przetłumaczony zasób zatwierdzony przez:	B. Stankiewicz	PRz	

Informacje ramowe

Tytuł*	Przykład: Belka swobodnie podparta obciążona na końcach momentami zginającymi	
Seria		
Opis*	Ten przykład przedstawia szczegółowe sprawdzenie nośności belki swobodnie podpartej, obciążonej na końcach momentami zginającymi.	
Poziom dostępu*	Ekspertyza	Praktyka
Identyfikator*	Nazwa pliku	D:\ACCESS_STEEL_PL\SX\SX011a-PL-EN_.doc
Format	Microsoft Office Word; 9 Stron; 390kb;	
Kategoria*	Tytuł zasobu	Przykład obliczeniowy
	Punkt widzenia	Inżynier
Przedmiot*	Obszar zastosowania	Budynki wielokondygnacyjne
Daty	Data utworzenia	24/08/2005
	Data ostatniej modyfikacji	27/06/05
	Data sprawdzenia	27/06/05
	Ważny od	
	Ważny do	
Język(i)*		Polski
Kontakt	Autor	Arnaud LEMAIRE, CTICM
	Sprawdzony przez	Alain BUREAU, CTICM
	Zatwierdzony przez	
	Redaktor	
	Ostatnio modyfikowany przez	
Słowa kluczowe*	Wyboczenie, nośność na zwichrzenie, belka	
Zobacz też	Odniesienie do Eurocodu	EN 1993-1-1, EN 1993-1-5
	Przykład(y) obliczeniowy	
	Komentarz	
	Dyskusja	
	Inne	SN002
Omówienie	Narodowa przydatność	EU
Szczególne instrukcje		