


<b>ARKUSZ OBLICZENIOWY</b> 	Dokument Ref:	<i>SX001a-EN-EU</i>	Strona	<i>1 z 8</i>
	Tytuł	<i>Przykład: Belka swobodnie podparta bez stężeń bocznych</i>		
	Dot. Eurokodu	<i>EN 1993-1-1</i>		
	Wykonał	<i>Alain Bureau</i>	Data	<i>grudzień 2004</i>
	Sprawdził	<i>Yvan Galéa</i>	Data	<i>grudzień 2004</i>

## Przykład: Belka swobodnie podparta bez stężeń bocznych

Przykład ilustruje zasady weryfikacji nośności swobodnie podpartej belki stalowej, obciążonej w sposób równomierny. Belka posiada stężenia boczne jedynie na podporach.

### Zakres

Przykład obejmuje zakresem sprawdzenie nośności belki wykonanej z kształtownika walcowanego na gorąco, zginanego względem “mocniejszej” osi przekroju, posiadającej stężenia boczne jedynie na podporach. Przykład zawiera:

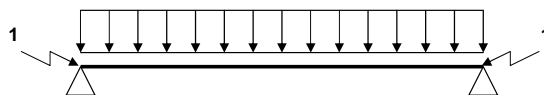
- Klasyfikację przekroju,
- Obliczenie nośności przy zginaniu, włączając w to wyznaczenie momentu krytycznego przy zwichrzeniu sprężystym,
- Obliczenie nośności przy ścinaniu,
- Obliczenie ugięcia w stanie granicznym użyteczności.

Przykład nie uwzględnia utraty stateczności środnika przy ścinaniu.

### Obciążenie

Obciążenie równomiernie rozłożone uwzględnia:

- Ciężar własny belki
- Ciężar płyty stropowej
- Obciążenia użytkowe



1: Boczne stężenia


### Częściowe współczynniki bezpieczeństwa

- $\gamma_G = 1,35$  (oddziaływania stałe)
- $\gamma_Q = 1,50$  (oddziaływania zmienne)
- $\gamma_{M0} = 1,0$
- $\gamma_{M1} = 1,0$

PN-EN 1990

PN-EN  
1993-1-1

[§ 6.1](#) (1)

<b>ARKUSZ OBLICZENIOWY</b> 	Dokument Ref:	<i>SX001a-EN-EU</i>	Strona	<b>2 z 8</b>
	Tytuł	<i>Przykład: Belka swobodnie podparta bez stężeń bocznych</i>		
	Dot. Eurokodu	<i>EN 1993-1-1</i>		
	Wykonał	<i>Alain Bureau</i>	Data	<i>grudzień 2004</i>
	Sprawdził	<i>Yvan Galéa</i>	Data	<i>grudzień 2004</i>

### Dane podstawowe

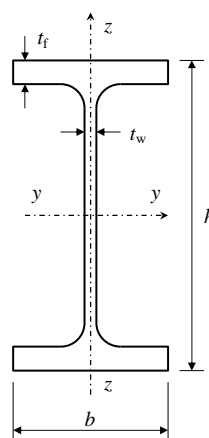
Projektowanie drugorzędnej belki stropowej w budynku wielokondygnacyjnym jest oparte o dane podane poniżej. Założono, że belka posiada stężenia boczne jedynie na podporach.

- Rozpiętość przęsła: 5,70 m
- Rozstaw belek: 2,50 m
- Grubość płyty stropowej: 12 cm
- Ciężar ścianek działowych: 0,75 kN/m<sup>2</sup>
- Obciążenie użytkowe: 2,50 kN/m<sup>2</sup>
- Ciężar objętościowy betonu: 24 kN/m<sup>3</sup>
- Gatunek stali: S235

Ciężar płyty stropowej:  $0,12 \times 24 \text{ kN/m}^3 = 2,88 \text{ kN/m}^2$


Dobrano IPE 330 – gatunek stali S235

Wysokość	$h = 330 \text{ mm}$
Szerokość	$b = 160 \text{ mm}$
Grubość środnika	$t_w = 7,5 \text{ mm}$
Grubość stopki	$t_f = 11,5 \text{ mm}$
Promień wyokrąglenia	$r = 18 \text{ mm}$
Masa jednostkowa	$49,1 \text{ kg/m}$



Euronorm  
19-57

Pole przekroju poprzecznego	$A = 62,6 \text{ cm}^2$
Moment bezwładności przekroju wzgl. osi y-y	$I_y = 11770 \text{ cm}^4$
Moment bezwładności przekroju wzgl. osi z-z	$I_z = 788,1 \text{ cm}^4$
Moment bezwładności przy skręcaniu	$I_t = 28,15 \text{ cm}^4$
Wycinkowy moment bezwładności	$I_w = 199100 \text{ cm}^6$
Sprężysty wskaźnik wytrzymałości	$W_{el,y} = 713,1 \text{ cm}^3$
Wskaźnik oporu plastycznego	$W_{pl,y} = 804,3 \text{ cm}^3$

<b>ARKUSZ OBLICZENIOWY</b> 	Dokument Ref:	<i>SX001a-EN-EU</i>	Strona	<b>3</b> z <b>8</b>
	Tytuł	<i>Przykład: Belka swobodnie podparta bez stężeń bocznych</i>		
	Dot. Eurokodu	<i>EN 1993-1-1</i>		
	Wykonał	<i>Alain Bureau</i>	Data	<i>grudzień 2004</i>
	Sprawdził	<i>Yvan Galéa</i>	Data	<i>grudzień 2004</i>

Ciężar własny belki:  $(49,1 \times 9,81) \times 10^{-3} = 0,482 \text{ kN/m}$

Oddziaływania stałe:

$$G = 0,482 + (2,88 + 0,75) \times 2,50 = 9,56 \text{ kN/m}$$

Oddziaływania zmienne (obciążenie użytkowe):

$$Q = 2,5 \times 2,5 = 6,25 \text{ kN/m}$$

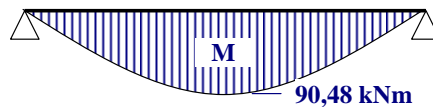
### **Kombinacja oddziaływań w SGN:**

$$\gamma_G G + \gamma_Q Q = 1,35 \times 9,56 + 1,50 \times 6,25 = 22,28 \text{ kN/m}$$

PN-EN 1990

[§ 6.4.3.2](#)

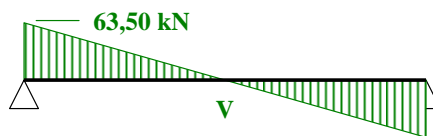
### **Wykres momentu zginającego**



Największy moment zginający w środku rozpiętości przęsła:

$$M_{y,Ed} = 0,125 \times 22,28 \times 5,70^2 = 90,48 \text{ kNm}$$

### **Wykres siły poprzecznej**



Największa siła poprzeczna przy podporze:

$$V_{z,Ed} = 0,5 \times 22,28 \times 5,70 = 63,50 \text{ kN}$$

### **Granica plastyczności**

Gatunek stali S235


Największa grubość ścianki wynosi  $11,5 \text{ mm} < 40 \text{ mm}$ , więc:

$$f_y = 235 \text{ N/mm}^2$$

PN-EN  
1993-1-1

Tablica 3.1

**Uwaga**: Załącznik krajowy może narzucić wartości  $f_y$  z Tablicy 3.1 lub wartości z norm wyrobu.

<b>ARKUSZ OBLICZENIOWY</b> 	Dokument Ref:	<i>SX001a-EN-EU</i>	Strona	<i>4 z 8</i>
	Tytuł	<i>Przykład: Belka swobodnie podparta bez stężeń bocznych</i>		
	Dot. Eurokodu	<i>EN 1993-1-1</i>		
	Wykonał	<i>Alain Bureau</i>	Data	<i>grudzień 2004</i>
	Sprawdził	<i>Yvan Galéa</i>	Data	<i>grudzień 2004</i>

### Klasyfikacja przekroju:

Współczynnik  $\varepsilon$  jest uzależniony od granicy plastyczności stali:

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{235}{f_y [\text{N/mm}^2]}} = 1$$

**Wspornikowa część pasa:** stopka ściskana w sposób równomierny

$$c = (b - t_w - 2r) / 2 = (160 - 7,5 - 2 \times 18) / 2 = 58,25 \text{ mm}$$

$$c / t_f = 58,25 / 11,5 = 5,07 \leq 9 \varepsilon = 9 \quad \text{Klasa 1}$$

**Wewnętrzna część ściskana:** środnik zginany

$$c = h - 2t_f - 2r = 330 - 2 \times 11,5 - 2 \times 18 = 271 \text{ mm}$$

$$c / t_w = 271 / 7,5 = 36,1 < 72 \varepsilon = 72 \quad \text{Klasa 1}$$

**Klasa przekroju jest najwyższą (tj. najmniej korzystną) z klas przekroju wyznaczonych dla stopki i środnika. W rozpatrywanym przypadku – Klasa 1.**

Tak więc, weryfikacja nośności w SGN może zostać przeprowadzona przy użyciu plastycznej nośności przekroju.

### Nośność przy zginaniu

Obliczeniowa nośność przekroju przy zginaniu jest określona jako:

$$M_{c,Rd} = M_{pl,Rd} = W_{pl,y} f_y / \gamma_{M0} = (804,3 \times 235 / 1,0) / 1000$$


$$M_{c,Rd} = 189,01 \text{ kNm}$$

$$M_{y,Ed} / M_{c,Rd} = 90,48 / 189,01 = 0,479 < 1 \quad \text{OK}$$

PN-EN  
1993-1-1  
Tablica 5.12  
(arkusz 2  
z 3)

PN-EN  
1993-1-1  
Tablica 5.2  
(arkusz 1  
z 3)

PN-EN  
1993-1-1  
[§ 6.2.5](#)

<b>ARKUSZ OBLICZENIOWY</b> 	Dokument Ref:	<i>SX001a-EN-EU</i>	Strona	<i>5 z 8</i>
	Tytuł	<i>Przykład: Belka swobodnie podparta bez stężeń bocznych</i>		
	Dot. Eurokodu	<i>EN 1993-1-1</i>		
	Wykonał	<i>Alain Bureau</i>	Data	<i>grudzień 2004</i>
	Sprawdził	<i>Yvan Galéa</i>	Data	<i>grudzień 2004</i>

### **Współczynnik zwichrzenia**

W celu wyznaczenia obliczeniowej nośności na zwichrzenie belki nie zabezpieczonej przed zwichrzeniem, należy wyznaczyć współczynnik zwichrzenia. Rachunek taki uwzględnia wyznaczenie momentu krytycznego przy zwichrzeniu sprężystym.

### **Moment krytyczny przy zwichrzeniu sprężystym**

Moment krytyczny może zostać obliczony z następującej zależności:

$$M_{cr} = C_1 \frac{\pi^2 E I_z}{(k L)^2} \left\{ \sqrt{\left( \frac{k}{k_w} \right)^2 \frac{I_w}{I_z} + \frac{(k L)^2 G I_t}{\pi^2 E I_z} + (C_2 z_g)^2} - C_2 z_g \right\}$$

$E$  jest modułem sprężystości  $E = 210000 \text{ N/mm}^2$

$G$  jest modułem sprężystości przy ścinaniu:  $G = 80770 \text{ N/mm}^2$

$L$  jest rozpiętością przęsła (rozstawem stężeń bocznych):  $L = 5,70 \text{ m}$

W wyrażeniu określającym  $M_{cr}$ , należy rozważyć następujące założenia:

$k = 1$  jeśli pas ściskany ma możliwość obrotu względem „słabej” osi przekroju poprzecznego,

$k_w = 1$  jeśli nie istnieją warunki przeciwdziałające spaczeniu przekroju na końcach belki.

$z_g$  jest odległością pomiędzy punktem przyłożenia obciążenia a środkiem ścinania:

$$z_g = h / 2 = +165 \text{ mm}$$

( $z_g$  przyjmuje wartość dodatnią, jeśli obciążenie działa w kierunku środka ścinania)


Współczynniki  $C_1$  oraz  $C_2$  zależą od rozkładu momentu zginającego. W przypadku obciążenia równomiernie rozłożonego oraz dla  $k = 1$ , mają one wartość:

$$C_1 = 1,127$$

$$C_2 = 0,454$$

Patrz [SN003](#)

Patrz [SN003](#)

<b>ARKUSZ OBLICZENIOWY</b> 	Dokument Ref:	<i>SX001a-EN-EU</i>	Strona	<b>6</b> z <b>8</b>
	Tytuł	<i>Przykład: Belka swobodnie podparta bez stężeń bocznych</i>		
	Dot. Eurokodu	<i>EN 1993-1-1</i>		
	Wykonał	<i>Alain Bureau</i>	Data	<i>grudzień 2004</i>
	Sprawdził	<i>Yvan Galéa</i>	Data	<i>grudzień 2004</i>

Zatem:

$$\frac{\pi^2 E I_z}{(k L)^2} = \frac{\pi^2 \times 210000 \times 788,1 \times 10^4}{(5700)^2} \times 10^{-3} = 502,75 \text{ kN}$$

$$C_2 z_g = 0,454 \times 165 = + 74,91 \text{ mm}$$

$$M_{cr} = 1,127 \times 502,75 \times \dots$$

$$\left\{ \sqrt{\frac{199100}{788,1} \times 100 + \frac{80770 \times 281500}{502750} + (74,91)^2} - 74,91 \right\} \cdot 10^{-3}$$

$$M_{cr} = 113,9 \text{ kNm}$$

### Smukłość względna

Smukłość względną wyznacza się z zależności:

$$\bar{\lambda}_{LT} = \sqrt{\frac{W_{pl,y} f_y}{M_{cr}}} = \sqrt{\frac{804300 \times 235 \times 10^{-6}}{113,9}} = 1,288$$

W wypadku dwuteowników walcowanych,  $\bar{\lambda}_{LT,0} = 0,4$

**Uwaga:** wartość  $\bar{\lambda}_{LT,0}$  może zostać określona w Załączniku krajowym. Wartością zalecaną jest 0,4.

Więc  $\bar{\lambda}_{LT} = 1,288 > \bar{\lambda}_{LT,0}$

### Współczynnik zwichrzenia

W przypadku dwuteowników walcowanych współczynnik zwichrzenia jest wyznaczony z zależności:


$$\chi_{LT} = \frac{1}{\phi_{LT} + \sqrt{\phi_{LT}^2 - \beta \bar{\lambda}_{LT}^2}} \text{ lecz } \begin{cases} \chi_{LT} \leq 1,0 \\ \chi_{LT} \leq \frac{1}{\bar{\lambda}_{LT}^2} \end{cases}$$

gdzie :  $\phi_{LT} = 0,5 \left[ 1 + \alpha_{LT} (\bar{\lambda}_{LT} - \bar{\lambda}_{LT,0}) + \beta \bar{\lambda}_{LT}^2 \right]$

PN-EN  
1993-1-1  
[§ 6.3.2.2](#) (1)

PN-EN  
1993-1-1  
[§ 6.3.2.3](#) (1)

PN-EN  
1993-1-1  
[§ 6.3.2.3](#) (1)

<b>ARKUSZ OBLICZENIOWY</b> 	Dokument Ref:	<i>SX001a-EN-EU</i>	Strona	7 z 8
	Tytuł	<i>Przykład: Belka swobodnie podparta bez stężeń bocznych</i>		
	Dot. Eurokodu	<i>EN 1993-1-1</i>		
	Wykonał	<i>Alain Bureau</i>	Data	<i>grudzień 2004</i>
	Sprawdził	<i>Yvan Galéa</i>	Data	<i>grudzień 2004</i>

$\alpha_{LT}$  jest parametrem imperfekcji przy zwichrzeniu. Gdy obliczenia dotyczą dwuteowników walcowanych, krzywą zwichrzenia należy określić według Tablicy 6.5:

Dla  $h/b = 330 / 160 = 2,06 > 2 \rightarrow$  **Krzywa c ( $\alpha_{LT} = 0,49$ )**

$\bar{\lambda}_{LT,0} = 0,4$  and  $\beta = 0,75$

**Uwaga:** Wartości  $\bar{\lambda}_{LT,0}$  oraz  $\beta$  mogą być określone w Załączniku krajowym. Wartościami zalecanymi są  $\bar{\lambda}_{LT,0}=0,4$  oraz  $\beta=0,75$ .

Otrzymano:  $\phi_{LT} = 0,5 \left[ 1 + 0,49 (1,288 - 0,4) + 0,75 \times (1,288)^2 \right] = 1,340$

oraz:  $\chi_{LT} = \frac{1}{1,340 + \sqrt{(1,340)^2 - 0,75 \times (1,288)^2}} = 0,480$

Następnie należy sprawdzić:  $\chi_{LT} = 0,480 < 1,0$  **OK**

oraz:  $\chi_{LT} = 0,480 < 1 / \bar{\lambda}_{LT}^2 = 0,603$  **OK**

Wpływ rozkładu momentów między bocznymi stężeniami na nośność obliczeniową przy zwichrzeniu można określić przez modyfikację współczynnika zwichrzenia:

$$f = 1 - 0,5 (1 - k_c) \left[ 1 - 2 (\bar{\lambda}_{LT} - 0,8)^2 \right] \quad \text{lecz } \leq 1$$

gdzie:  $k_c = 0,94$

Więc:  $f = 1 - 0,5 (1 - 0,94) [1 - 2 (1,288 - 0,8)^2] = 0,984$

Otrzymano:  $\chi_{LT,mod} = \chi_{LT} / f = 0,480 / 0,984 = 0,488$

### **Obliczeniowa nośność na zwichrzenie**

$$M_{b,Rd} = \chi_{LT,mod} W_{pl,y} f_y / \gamma_{M1}$$

$$M_{b,Rd} = (0,488 \times 804300 \times 235 / 1,0) \times 10^{-6} = 92,24 \text{ kNm}$$

$$M_{y,Ed} / M_{b,Rd} = 90,48 / 92,24 = 0,981 < 1 \quad \mathbf{OK}$$

### **Nośność przekroju przy ścinaniu**

W przypadku braku skręcania, nośność plastyczna przy ścinaniu zależy od pola przekroju czynnego przy ścinaniu, według zależności:

$$A_{v,z} = A - 2 b t_f + (t_w + 2 r) t_f$$


$$A_{v,z} = 6260 - 2 \times 160 \times 11,5 + (7,5 + 2 \times 18) \times 11,5 = 3080 \text{ mm}^2$$

PN-EN  
1993-1-1  
Tablica 6.5  
Tablica 6.3

PN-EN  
1993-1-1  
[§ 6.3.2.3](#) (2)  
PN-EN  
1993-1-1  
Tablica 6.6

PN-EN  
1993-1-1  
[§ 6.3.2.1](#)

PN-EN  
1993-1-1  
[§ 6.2.6](#) (3)

<b>ARKUSZ OBLICZENIOWY</b> 	Dokument Ref:	<i>SX001a-EN-EU</i>	Strona	8 z 8	
	Tytuł	<i>Przykład: Belka swobodnie podparta bez stężeń bocznych</i>			
	Dot. Eurokodu	<i>EN 1993-1-1</i>			
	Wykonał	<i>Alain Bureau</i>	Data	<i>grudzień 2004</i>	
	Sprawdził	<i>Yvan Galéa</i>	Data	<i>grudzień 2004</i>	
<p><b>Nośność plastyczna przy ścinaniu</b></p> $V_{pl,z,Rd} = \frac{A_{v,z} (f_y / \sqrt{3})}{\gamma_{M0}} = \frac{3080 \times (235 / \sqrt{3})}{1,0} = 417,9 \text{ kN}$ $V_{z,Ed} / V_{pl,z,Rd} = 63,50 / 417,9 = 0,152 < 1 \quad \mathbf{OK}$ <p>Sprawdzenie warunku stateczności środnika przy działaniu siły poprzecznej nie jest wymagane, gdy:</p> $h_w / t_w \leq 72 \varepsilon / \eta$ <p><math>\eta</math> może być konserwatywnie przyjęte jako 1.0</p> $h_w / t_w = (330 - 2 \times 11,5) / 7,5 = 40,9 < 72 \times 1 / 1,0 = 72$ <p><b>Uwaga:</b> Nie rozważano interakcji <i>M-V</i> ponieważ największy moment pojawia się w środku rozpiętości przęsła, zaś największa siła poprzeczna przy podporze. Ogólnie, w wypadku rozpatrywania zginania ze ścinaniem patrz PN-EN1993-1-1 § 6.2.8.</p> <p><b><u>Sprawdzenie stanu granicznego użytkowalności (SGU)</u></b></p> <p><b>Kombinacja oddziaływań w SGU</b></p> $G + Q = 9,56 + 6,25 = 15,81 \text{ kN/m}$ <p>Ugięcie powstałe pod działaniem <i>G+Q</i> :</p> $w = \frac{5(G + Q)L^4}{384 E I_y} = \frac{5 \times 15,81 \times (5700)^4}{384 \times 210000 \times 11770 \times 10^4} = 8,8 \text{ mm}$ <p>Strzałka ugięcia wynosi <i>L/648</i> – <b>OK</b></p> <p><b>Uwaga:</b> Ugięcia dopuszczalne powinny zostać określone przez Zamawiającego. Załącznik krajowy może określić wartości graniczne. W tym wypadku wynik można uznać za całkiem zadowalający.</p> <p><b>Uwaga 2:</b> Biorąc pod uwagę częstotliwość drgań własnych, Załącznik krajowy może określić warunki z wartościami granicznymi. W rozpatrywanym przykładzie ugięcie jest tak niewielkie, że problem drgań nie wystąpi.</p>					<p>PN-EN 1993-1-1 <a href="#">§ 6.2.6 (2)</a></p> <p>PN-EN 1993-1-1 <a href="#">§ 6.2.6 (6)</a></p> <p>PN-EN 1990 <a href="#">§ 6.5.3</a></p> <p>PN-EN 1993-1-1 <a href="#">§ 7.2.1</a></p> <p>PN-EN 1993-1-1 <a href="#">§ 7.2.3</a></p>



## Protokół jakości

Tytuł zasobu	Przykład: Belka swobodnie podparta bez stężeń bocznych		
Odniesienie			
<b>ORYGINAŁ DOKUMENTU</b>			
	<b>Imię i nazwisko</b>	<b>Instytucja</b>	<b>Data</b>
Stworzony przez	Alain Bureau	CTICM	
Zawartość techniczna sprawdzona przez	Yvan Galéa	CTICM	
Zawartość redakcyjna sprawdzona przez	D C Iles	SCI	2/3/05
Zawartość techniczna zaaprobowana przez:			
1. Wielka Brytania	G W Owens	SCI	1/3/05
2. Francja	A Bureau	CTICM	1/3/05
3. Szwecja	A Olsson	SBI	1/3/05
4. Niemcy	C Mueller	RWTH	1/3/05
5. Hiszpania	J Chica	Labein	1/3/05
Zasób zatwierdzony przez Koordynatora Technicznego	G W Owens	SCI	21/05/06
<b>TŁUMACZENIE DOKUMENTU</b>			
Tłumaczenie wykonał i sprawdził:	L. Ślęczka		
Tłumaczenie zatwierdzone przez:			